3/1

وزارة التعليم العالي	الامتحان النهائي	الاسم :
جامعة البعث	لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات	الدرجة 100
كلية العلوم – قسم الرياضيات	الفصل الثاني لعام 2016- 2017	المدة ساعة ونصف

ب عن الأسئلة التالية :

ال الأول (30درجة) (أ) عين مجال تقارب متسلسلة القوى الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-\frac{1}{2^n}\right)\frac{(x-2)^n}{n}$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للجداء اللانهائي الآتي :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n(\ln n)^2}{n}\right)$$

ؤال الثاني (36درجة) (أ) أدرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال التي حدها العام يعطى بالشكل :

$$f_n(x)=\frac{nx}{n^2+x^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{n}\right) \quad , \ \forall\ x\in[-1,1],\ \ n\in N$$

$$g_n(x)=nx^2e^{-nx} \quad , \ \forall\ x\epsilon\,[2,\infty[$$

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلتي الدوال الآتيتين :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right) \quad , \quad \forall\ x\in[0,1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2} \quad , \quad \forall\ x\in[0,\infty[$$

السؤال الثالث (34درجة) : (أ) أوجد متسلسلة فورييه للدالة :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2} & ,\ -\pi\le x<0\\ \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} & ,\ \ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

(ب) أثبت صحة الصيغة الآتية :

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p) \quad , \ \forall\ p>0$$

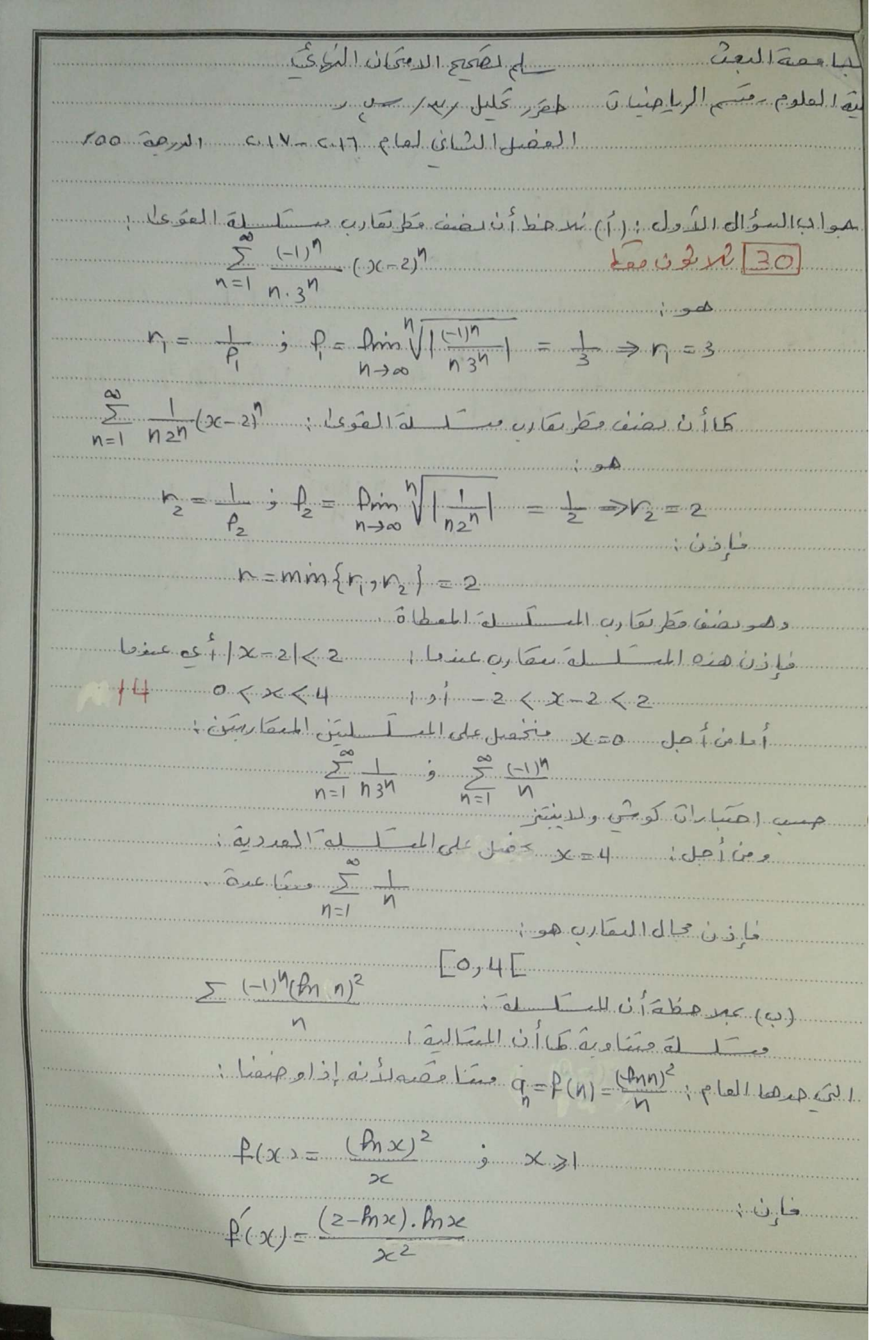
انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

حمص في 2 / 7 /2017

استاذ المقرر

د. منير مخلوف



جامعة البعث — سلم تصحيح الامتحان النظري

كلية العلوم - قسم الرياضيات — مقرر: تحليل رياضي / [illegible]

الفصل الثاني لعام ٢٠١٦-٢٠١٧ — الدرجة ٢٥٠

جواب السؤال الأول: (أ) نلاحظ أن نصف قطر تقارب متسلسلة القوى:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}(x-2)^n$$

30 ثلاثون علامة

هو:

$$r_1 = \frac{1}{\rho_1} \quad ; \quad \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\,3^n}\right|} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = 3$$

كما أن نصف قطر تقارب متسلسلة القوى: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-2)^n$

هو:

$$r_2 = \frac{1}{\rho_2} \quad ; \quad \rho_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\,2^n}\right|} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 2$$

فإذن:

$$r = \min\{r_1, r_2\} = 2$$

وهو نصف قطر تقارب المتسلسلة المعطاة.

فإذن هذه المتسلسلة متقاربة عندما: $|x-2|<2$ ، أي عندما

أو: $-2 < x-2 < 2$ ، أي $0 < x < 4$ — 14

أما من أجل $x=0$ فنحصل على المتسلسلتين المتقاربتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,3^n} \quad و \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

حسب اختباري كوشي ولايبنتز

ومن أجل: $x=4$ نحصل على المتسلسلة العددية:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

فإذن مجال التقارب هو:

$$[0,4[$$

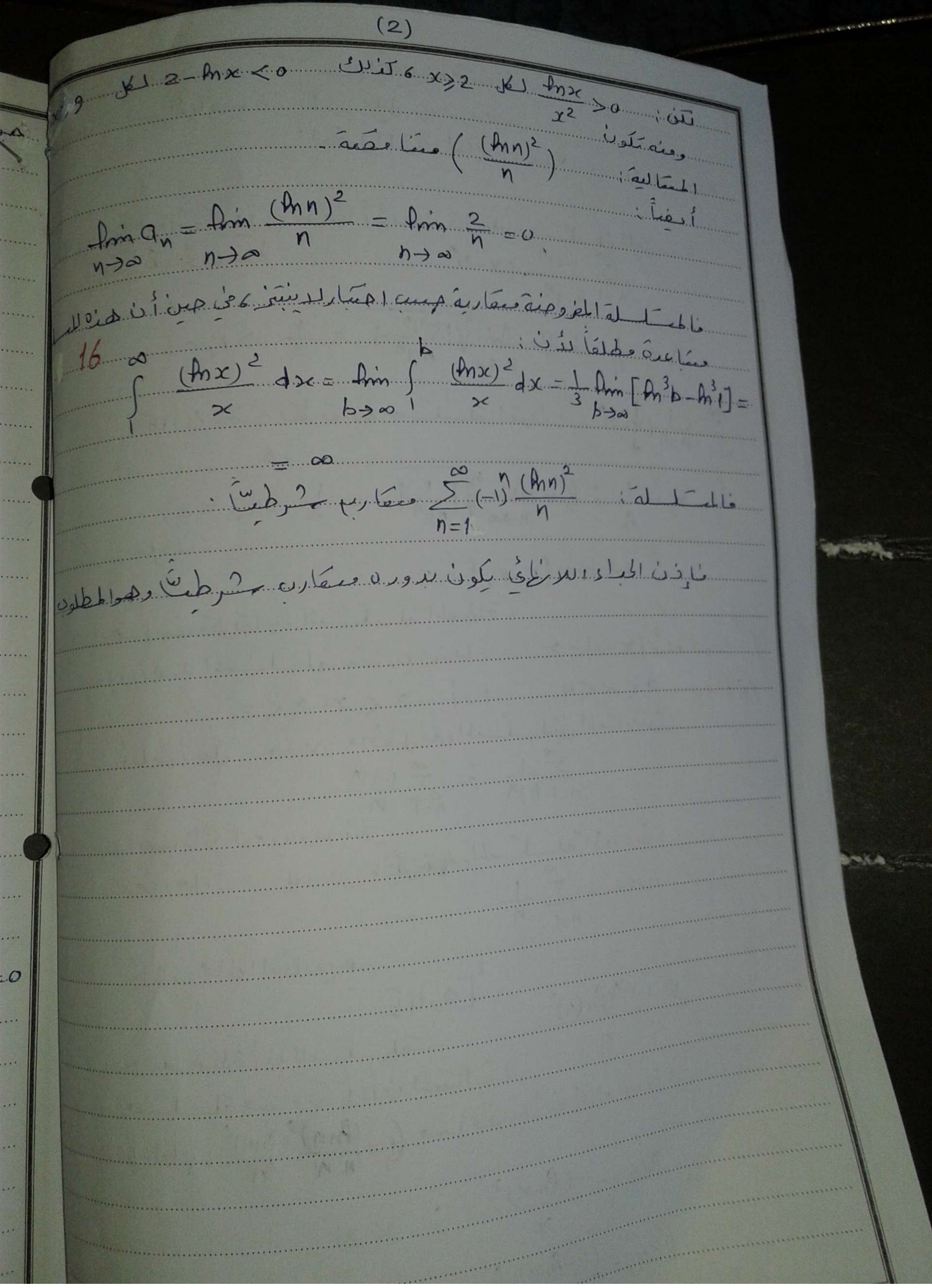
(ب) نلاحظ أن المتسلسلة: $\sum \frac{(-1)^n(\ln n)^2}{n}$

متسلسلة متناوبة كما أن المتتالية التي حدها العام: $a_n = f(n) = \frac{(\ln n)^2}{n}$ متناقصة لأنه إذا وضعنا:

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad ; \quad x \geq 1$$

فإن:

$$f'(x) = \frac{(2-\ln x)\cdot \ln x}{x^2}$$



لكن: $\frac{\ln x}{x^2} > 0$ لكل $x \geq 2$ ، كذلك $2 - \ln x < 0$ لكل $x \geq 9$

ومنه تكون المتتالية: $\left(\frac{(\ln n)^2}{n} \right)$ متناقصة.

أيضاً:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$$

فالمتسلسلة المفروضة متقاربة حسب اختبار ليبنتز، في حين أن هذه المتسلسلة متباعدة مطلقاً لأن:

16

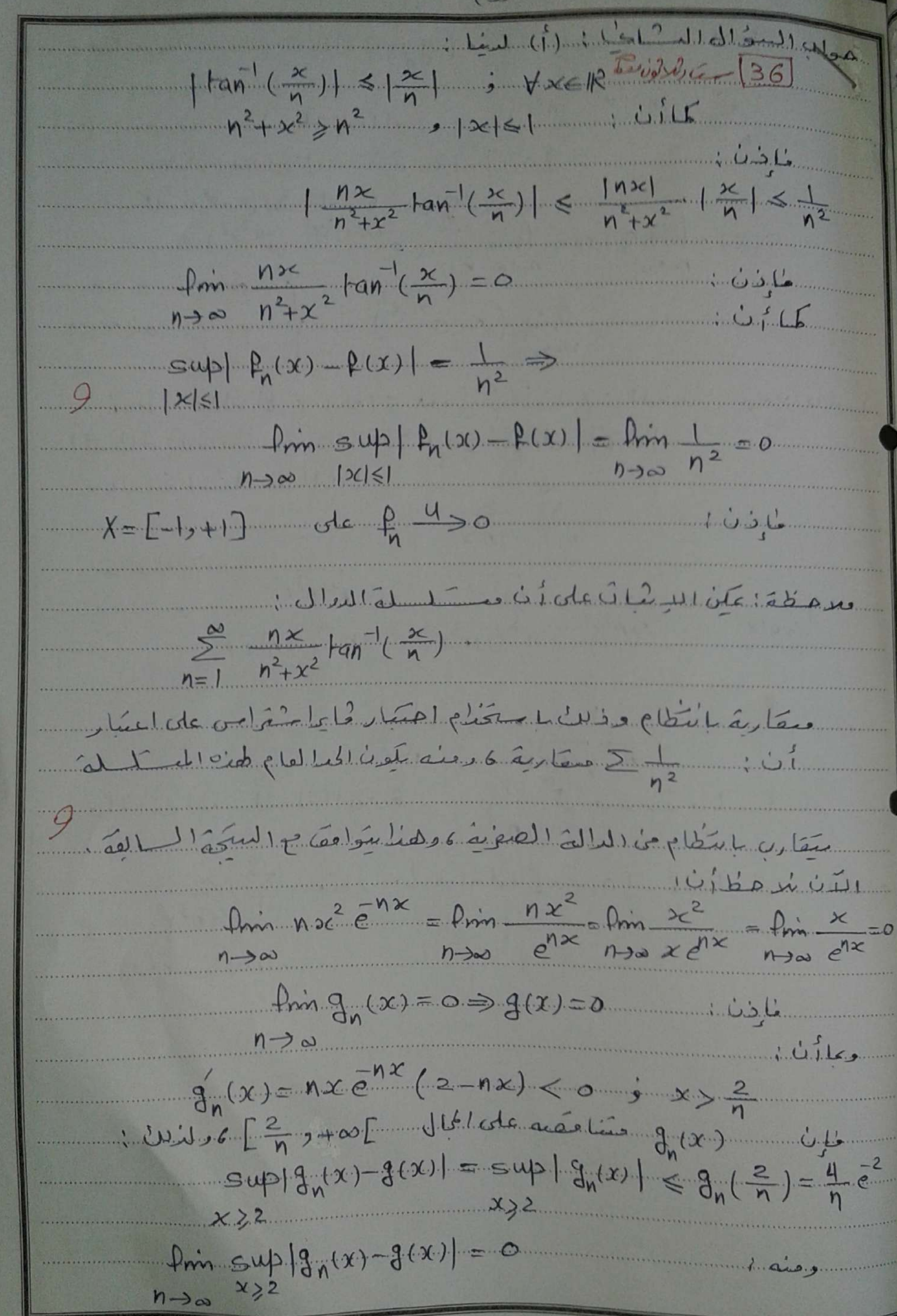
$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3} \lim_{b \to \infty} [\ln^3 b - \ln^3 1] =$$

$$= \infty$$

فالمتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$ متقاربة مشروطاً.

فإذن الجداء اللانهائي يكون بدوره متقارب مشروطاً وهو المطلوب

Scanned by CamScanner



حوالب السؤال الثاني: (أ) لدينا:

36

$$|\tan^{-1}(\frac{x}{n})| \leq |\frac{x}{n}| \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

كما أن: $|x| \leq 1$, $n^2 + x^2 \geq n^2$

فإذن:

$$|\frac{nx}{n^2+x^2}\tan^{-1}(\frac{x}{n})| \leq \frac{|nx|}{n^2+x^2} |\frac{x}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$$

فإذن: $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2+x^2}\tan^{-1}(\frac{x}{n}) = 0$

كما أن:

$$\sup_{|x|\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

9

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

فإذن: $f_n \xrightarrow{u} 0$ على $X = [-1, +1]$

ملاحظة: يمكن الإثبات على أن متسلسلة الدوال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^2+x^2}\tan^{-1}(\frac{x}{n})$$

متقاربة بانتظام وذلك باستخدام اختبار فايرشتراس على اعتبار أن: $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة، ومنه يكون الحد العام لهذه المتسلسلة

9

يتقارب بانتظام من الدالة الصفرية، وهذا يتوافق مع النتيجة السابقة.

الآن نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} nx^2 e^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{x e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{e^{nx}} = 0$$

فإذن: $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

وكما أن:

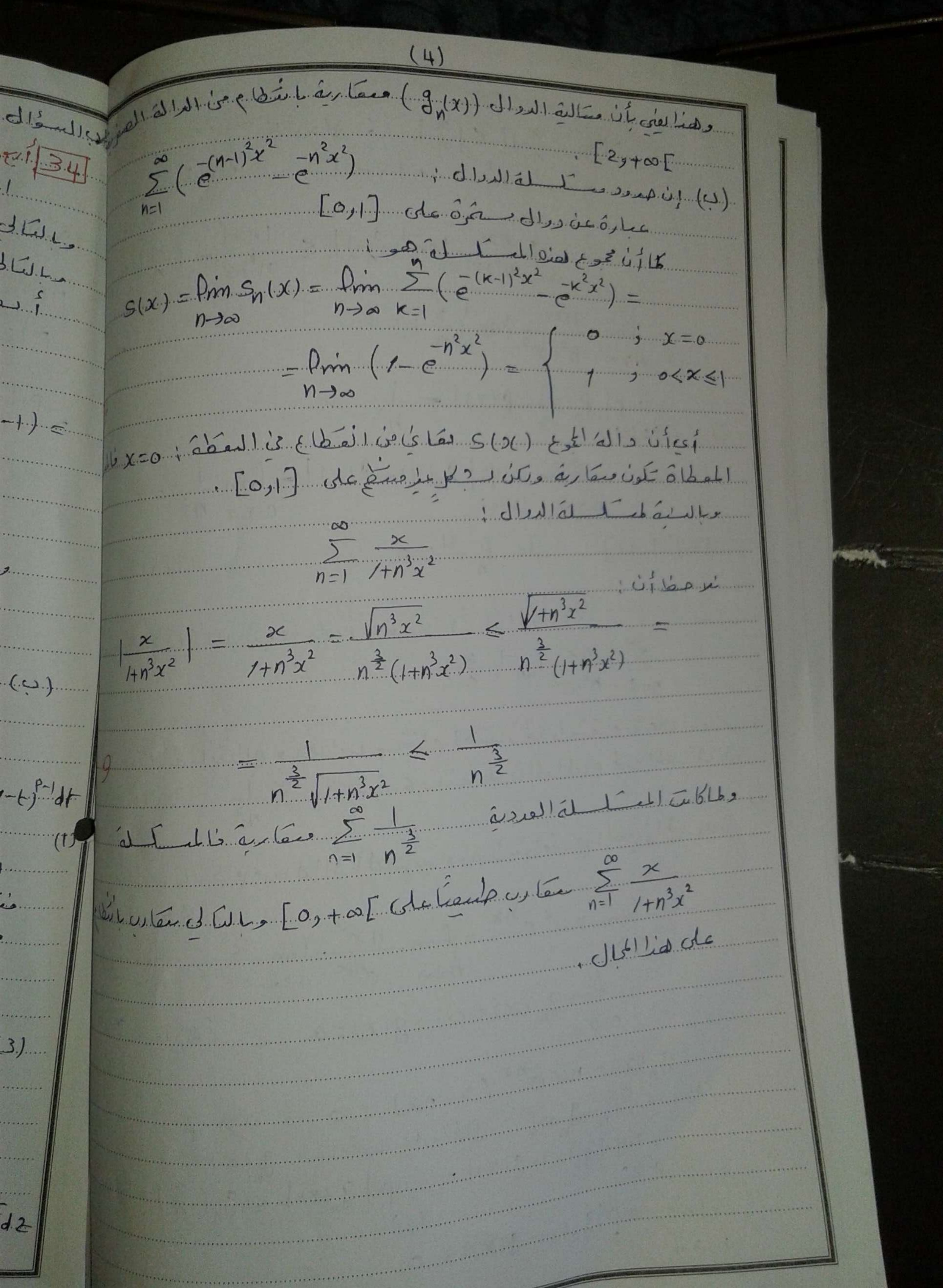
$$g_n'(x) = nx e^{-nx}(2 - nx) < 0 \quad ; \quad x > \frac{2}{n}$$

فإن $g_n(x)$ متناقصة على المجال $[\frac{2}{n}, +\infty[$ ، ولذلك:

$$\sup_{x\geq 2} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\geq 2} |g_n(x)| \leq g_n(\frac{2}{n}) = \frac{4}{n} e^{-2}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 2} |g_n(x) - g(x)| = 0$$



وهذا يعني بأن متتالية الدوال $(g_n(x))$ متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية على $[2,+\infty[$.

(ب) إن حدود متسلسلة الدوال: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right)$

عبارة عن دوال مستمرة على $[0,1]$

كما أن مجموع هذه المتسلسلة هو:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-(k-1)^2x^2}-e^{-k^2x^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-n^2x^2}\right)=\begin{cases}0 & ; x=0\\ 1 & ; 0<x\leq 1\end{cases}$$

أي أن دالة المجموع $S(x)$ تعاني من انقطاع في النقطة $x=0$ ؛ وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تكون متقاربة ولكن بشكل غير منتظم على $[0,1]$.

وبالنسبة لمتسلسلة الدوال:

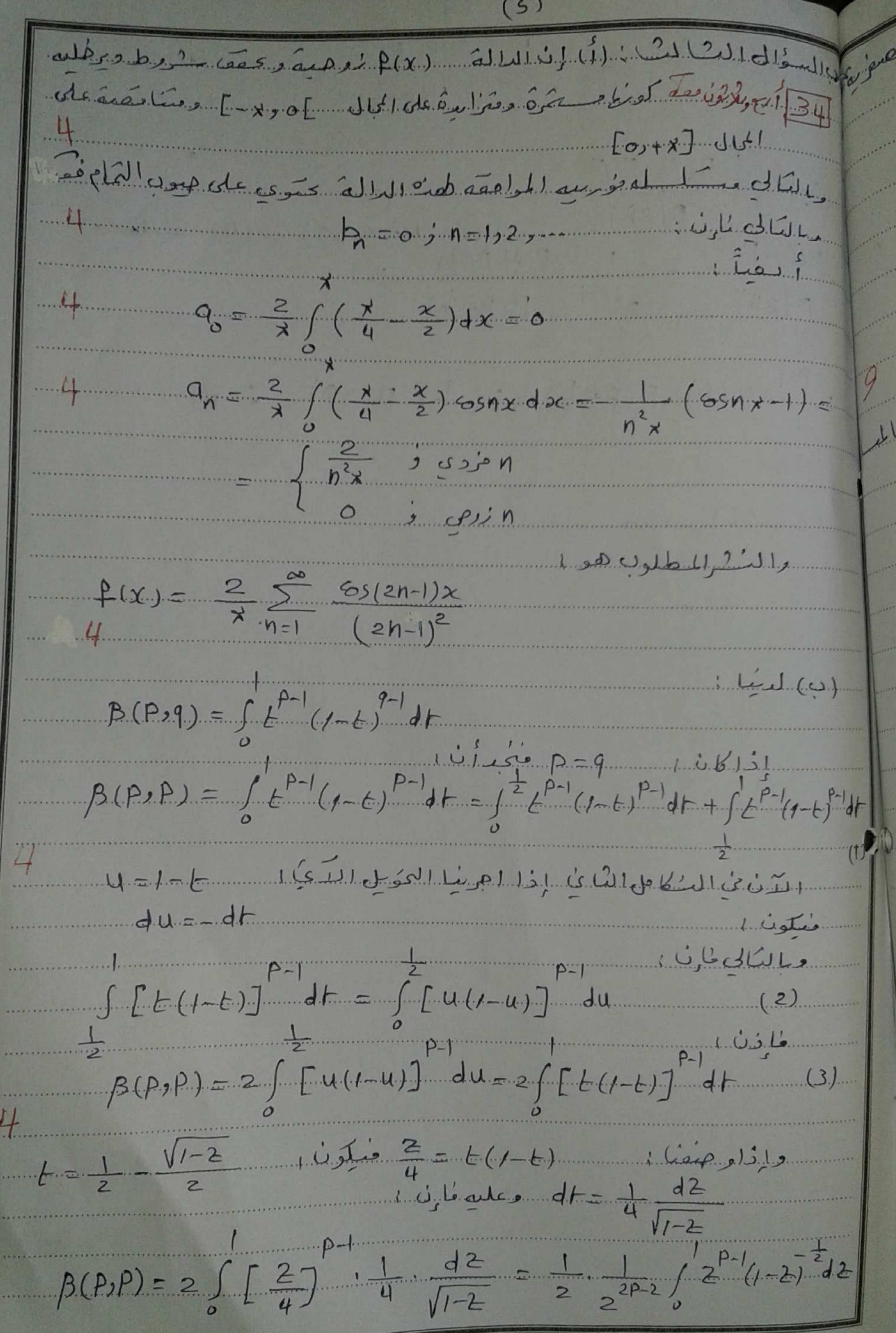
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$$

نلاحظ أن:

$$\left|\frac{x}{1+n^3x^2}\right|=\frac{x}{1+n^3x^2}=\frac{\sqrt{n^3x^2}}{n^{\frac{3}{2}}(1+n^3x^2)}\leq\frac{\sqrt{1+n^3x^2}}{n^{\frac{3}{2}}(1+n^3x^2)}=$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+n^3x^2}}\leq\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

وطالما أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$ متقارب طبيعيا على $[0,+\infty[$ وبالتالي متقارب بانتظام على هذا المجال.



السؤال الثالث: (أ) إن الدالة $f(x)$ زوجية وتحقق شروط ديريكليه 34 أربع وثلاثون فقط كونها مستمرة ومتزايدة على المجال $]-\pi,0[$ ومتناقصة على المجال $[0,+\pi]$ 4

وبالتالي سلسلة فورييه الموافقة لهذه الدالة تحتوي على جيوب التمام فقط

4 وبالتالي فإن: $b_n = 0 \; ; \; n = 1, 2, \dots$

أيضاً:

4 $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx = 0$$

4 $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = -\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) =$$ 9

$$= \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi} & ; \; n \text{ فردي} \\ 0 & ; \; n \text{ زوجي} \end{cases}$$

والنشر المطلوب هو:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

4

(ب) لدينا:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

إذا كان $p = q$ فنجد أن:

$$B(p,p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt \quad (1)$$

4

الآن في التكامل الثاني إذا أجرينا التحويل التالي: $u = 1 - t$

فيكون: $du = -dt$

وبالتالي فإن:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 [t(1-t)]^{p-1}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}}[u(1-u)]^{p-1}\,du \quad (2)$$

فإذن:

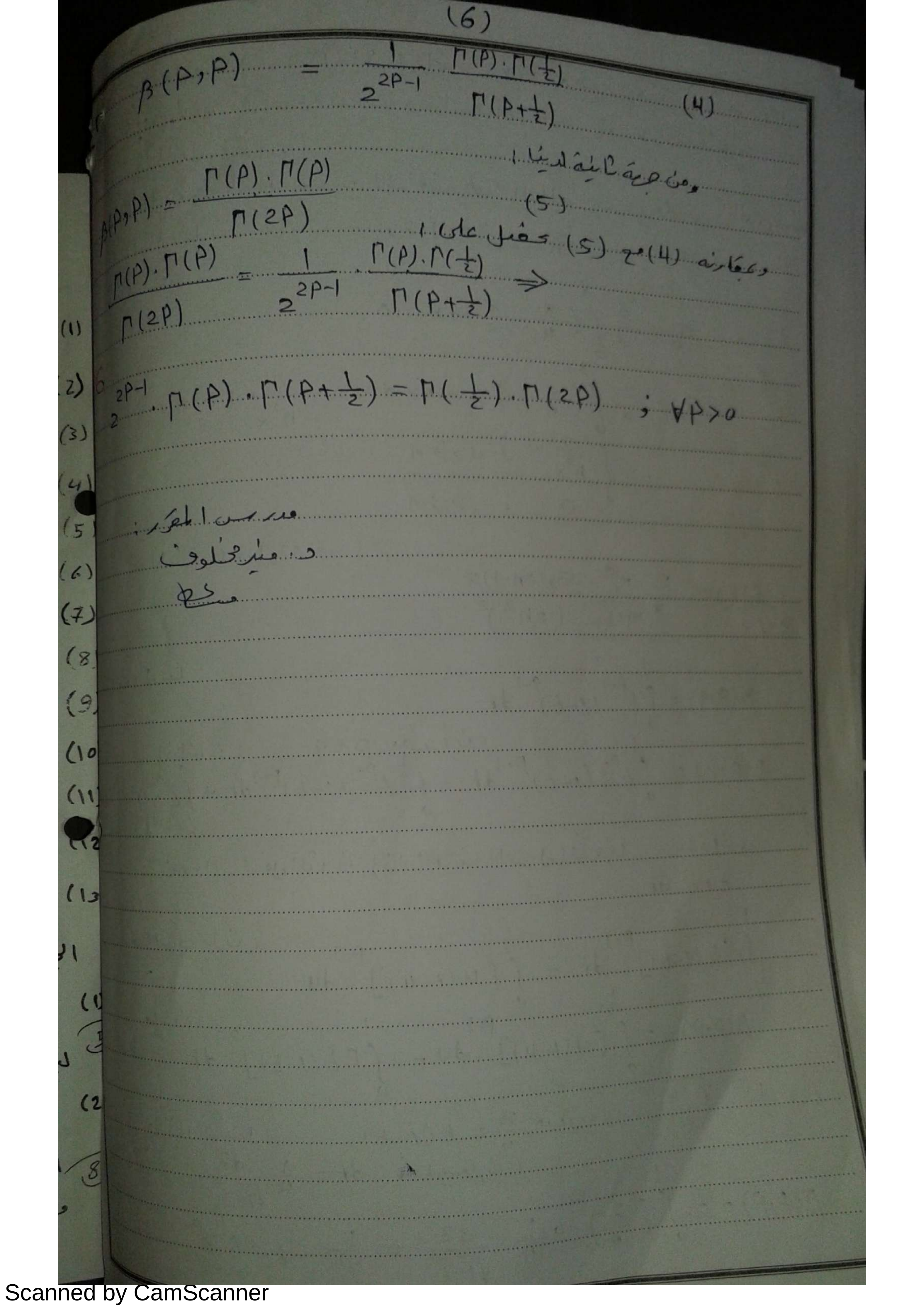
$$B(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}}[u(1-u)]^{p-1}\,du = 2\int_0^{\frac{1}{2}}[t(1-t)]^{p-1}\,dt \quad (3)$$

4

وإذا وضعنا: $\frac{z}{4} = t(1-t)$ فيكون: $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-z}}{2}$

وعليه فإن: $dt = \frac{1}{4}\frac{dz}{\sqrt{1-z}}$

$$B(p,p) = 2\int_0^1\left[\frac{z}{4}\right]^{p-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$



(6)

$$\beta(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \qquad (4)$$

ومن جهة ثانية لدينا :

$$\beta(p,p) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} \qquad (5)$$

وبمقارنة (4) مع (5) نحصل على :

$$\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \Rightarrow$$

$$2^{2p-1}\cdot\Gamma(p)\cdot\Gamma(p+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma(2p) \quad ; \forall p>0$$

مدرس المقرر :

د. منير مخلوف